ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN

TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

LƯƠNG THỊ KIM TÂN

HAI KIỂU ĐƯỜNG TRÒN APOLLONIUS VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Thái Nguyên - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

o0o

LƯƠNG THỊ KIM TÂN

HAI KIỂU ĐƯỜNG TRÒN APOLLONIUS VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: Phương pháp toán sơ cấp
Mã số: 8 46 01 13

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. NGUYỄN VIỆT HẢI

Thái Nguyên - 2020

Lời cảm ơn

Luận văn này được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên, dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Nguyễn Việt Hải, Giảng viên cao cấp Trường Đại học Hải Phòng.Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành tới thầy hướng dẫn, người đã tạo cho tôi một phương pháp nghiên cứu khoa học đúng đắn, tinh thần làm việc nghiêm túc và đã dành nhiều thời gian, công sức giúp đỡ tôi hoàn thành luận văn.

Tôi xin chân thành cảm ơn phòng Đào tạo, Khoa Toán - Tin, quý thầy cô giảng dạy lớp Cao học K12A trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình truyền đạt những kiến thức quý báu cũng như tạo điều kiện cho tôi hoàn thành khóa học.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc tới Trung tâm Nghiên cứu Giáo dục và Đào tạo Hải Phòng đã giúp đỡ, tạo mọi điều kiện thuận lợi giúp tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tác giả cũng xin gửi lời cảm ơn tới tập thể lớp Cao học Toán K12B đã luôn động viên và giúp đỡ tác giả rất nhiều trong quá trình học tập và làm luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành tới gia đình, bạn bè đã giúp đỡ và tạo điều kiện tốt nhất cho tôi khi học tập và nghiên cứu.

Thái Nguyên, tháng 8 năm 2020

Tác giả

Lương Thị Kim Tân

Danh mục hình

Mục lục

Chương 1

Đường tròn Apollonius kiểu 1

1.1 Định nghĩa và các tính chất

Apollonius là một nhà hình học lỗi lạc người Hy Lạp. Tên tuổi của ông gắn liền với một số bài toán nổi tiếng, đặc biệt là bài toán về đường tròn Apollonius. Có bốn định nghĩa khác nhau về một đường tròn có tên gọi là "đường tròn Apollonius":

(1) Quỹ tích tất cả các điểm (trên mặt phẳng) mà tỷ số khoảng cách từ đó đến 2 điểm cố định là một hằng số (Durell 1928, Ogilvy 1990).

(2) Đường tròn tiếp xúc với ba đường tròn bàng tiếp của tam giác (Kimberling 1998, trang 102).

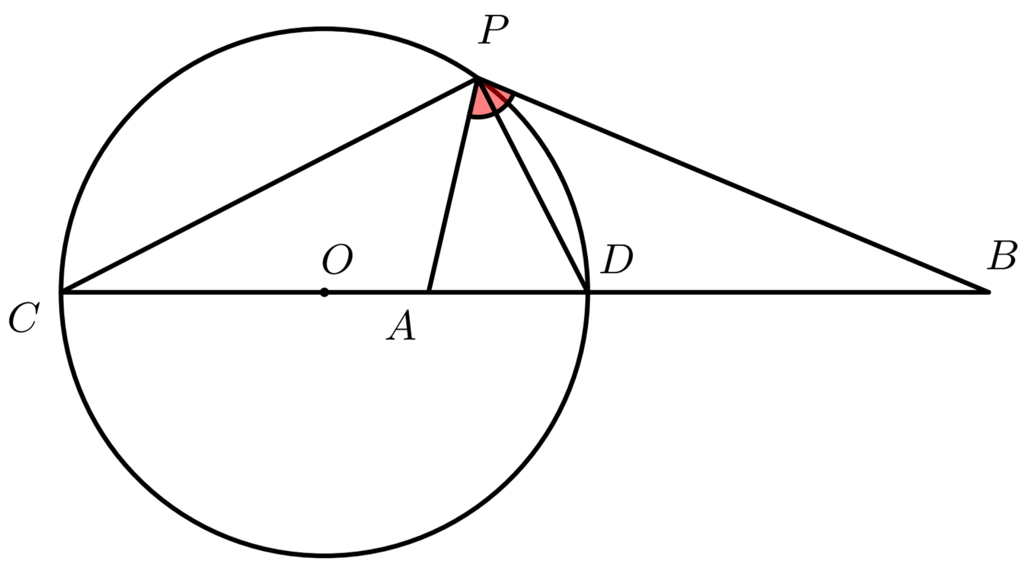
(3) Một trong 8 đường tròn tiếp xúc với 3 đường tròn cho trước (tức là nghiệm của bài toán Apollonius).

(4) Một trong ba đường tròn đi qua đỉnh tam giác và hai điểm đẳng giác của tam giác (Kimberling 1998, trang 68).

Chương này trình bày về đường tròn Apollonius kiểu 1. Trước tiên ta giới thiệu về đường tròn Apollonius của đoạn thẳng đã được định nghĩa trong sách phổ thông, chẳng hạn trong [1], hoặc trong các Giáo trình hình học sơ cấp.

Bổ đề 1.1.1. *Trên mặt phẳng cho hai điểm A, B. Tập hợp các điểm P sao cho tỉ số $\dfrac{PA}{PB} = k$ không đổi $(k > 0)$ là một đường tròn.*

Chứng minh. Gọi C, D là hai điểm nằm trong và ngoài đoạn thẳng AB sao cho $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB} = k$. Khi đó $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{DA}{DB}$ nên C, D lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài của góc APB. Suy ra $\widehat{CPD} = 90^0$. Vậy P nằm trên đường tròn đường kính CD. Ngược lại giả sử P là điểm bất kì nằm trên đường tròn đường kính CD, khi đó $\widehat{CPD} = 90^0$. Mặt khác, bốn điểm A, B, C, D là một hàng điểm điều hòa, tức $(ABCD) = -1$ nên theo tính chất đường phân giác ta có C, D lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài của góc APB. Từ đó $\dfrac{PA}{PB} = k$. Như vậy tập hợp các điểm P là đường tròn đường kính CD. □



Hình 1.1: Đường tròn Apollonius của đoạn thẳng

Định nghĩa 1.1. *Đường tròn quỹ tích những điểm mà tỷ số các khoảng cách từ đó đến hai điểm cố định là một hằng số k được gọi là đường tròn Apollonius của đoạn thẳng đó ứng với tỉ số k.*

Chú ý rằng khi $k = 1$, đường tròn Apollonius suy biến thành đường trung trực của đoạn thẳng.

Từ định nghĩa đường tròn Apollonius của đoạn thẳng chúng ta định nghĩa đường tròn Apollonius của tam giác như sau.

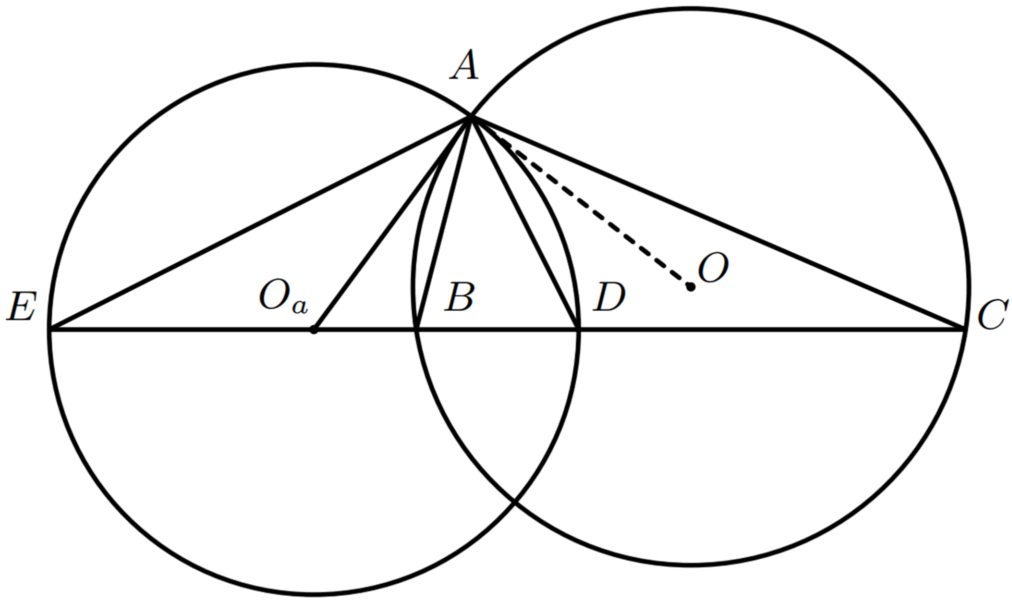
Định nghĩa 1.2. *Đường tròn Apollonius kiểu 1 của tam giác ABC ứng với đỉnh A là đường tròn đi qua A và hai chân đường phân giác trong và ngoài của $\widehat{A}$.*

Như vậy trong một tam giác, có ba đường tròn Apollonius kiểu 1 ứng với ba đỉnh của tam giác. Ta gọi các đường tròn này là $A-$Apollonius, $B-$Apollonius và $C-$Apollonius, tương ứng. Rõ ràng các đoạn thẳng nối chân phân giác trong và chân phân giác ngoài là đường kính mỗi đường tròn Apollonius kiểu 1, tương ứng. Sau đây chúng ta tìm hiểu một số tính chất của các đường tròn này.

1.1.1 Tính chất của đường tròn Apollonius kiểu 1

Tính chất 1.1.1. *Mỗi đường tròn Apollonius kiểu* 1 *trực giao với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.*

Chứng minh. Gọi D, E lần lượt là chân đường phân giác trong và ngoài góc BAC của tam giác ABC, J là trung điểm DE. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Do $(BCDE) = -1$ nên theo hệ thức Newton $O_aA^2 = O_aD^2 = O_aB.O_aC$ hay O_aA là tiếp tuyến của (O). Điều đó có nghĩa là $(O_a) \perp (O)$. □



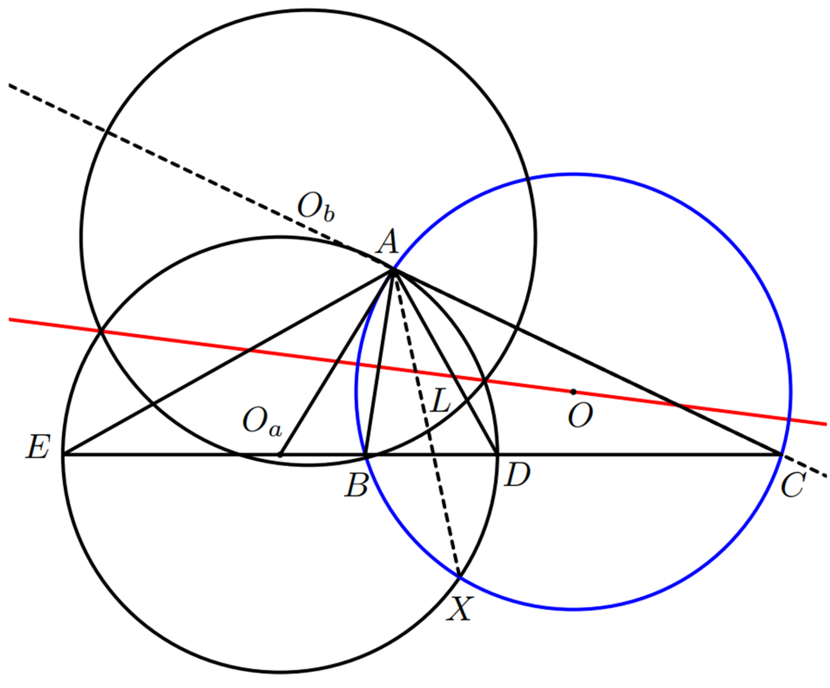
Hình 1.2: Đường tròn (O_a) trực giao với (ABC)

Từ tính chất trên ta thấy tâm của đường tròn Apollonius là giao của tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp kẻ từ một đỉnh tới cạnh đối diện.

Ta nhắc lại rằng đường thẳng đối xứng với trung tuyến qua đường phân giác trong tại một đỉnh là đường đối trung của tam giác ấy. Trong một tam giác, ba đường đối trung cắt nhau tại một điểm, điểm đó được gọi là điểm Lemoine hay điểm đối trung ký hiệu bởi L.

Tính chất 1.1.2. *Ba đường Apollonius kiểu* 1 *của tam giác thì đồng trục, trục đẳng phương của chúng là đường thẳng OL với L là điểm Lemoine.*

Chứng minh. Gọi $(O_a), (O_b), (O_c)$ lần lượt là các đường tròn A-Apollonius, B-Apollonius, C-Apollonius, X là giao điểm thứ hai của (O_a) với (O). Do $(O_c) \perp (O)$ nên O_aA, O_aX là hai tiếp tuyến của (O). Suy ra tứ giác $ABXC$ là tứ giác điều hoà hay AX là đường đối trung ứng với đỉnh A của ΔABC. Như vậy AX đi qua điểm Lemoine L của tam giác ABC. Nghĩa là L nằm trên trục đẳng phương của (O_a) và (O). Tương tự L nằm trên trục đẳng phương của (O_b) và (O), của (O_c) và (O) hay L có cùng phương tích đối với 3 đường tròn $(O_a), (O_b), (O_c)$. Mặt khác, phương tích của O đối với ba đường tròn Apollonius thì bằng nhau và bằng R^2. Vậy OL là trục đẳng phương của $(O_a), (O_b), (O_c)$. Ba đường tròn này đồng trục. □



Hình 1.3: LO là trục của ba đường tròn

Hệ quả 1.1.1. *Ba tâm các đường tròn Apollonius kiểu* 1 *thẳng hàng.*

Chứng minh. Vì OL là trục đẳng phương của ba đường tròn nên ta có $O_AO_B \perp OL$ và $O_BO_C \perp OL$. Suy ra O_A, O_B, O_C thẳng hàng. □